CSE2011 Problem Solving, 2016 Spring

2013312343 이상헌

**Homework 6-2**

**1. 문제 이해**

(1) 문제

**Problem 6-2: Land Lease(30 points)**

- You are going to lease a piece of land. For each unit of land, you should pay X amount of fee, and you will earn some money from the land.

- Develop an algorithm that finds a rectangle maximizing your profit.

(2) 문제 정의

- 각 밭을 샀을 때 얻는 이익 및 밭 1칸의 가격이 정해져 있다.

- 이익이 최대가 되도록 직사각형 꼴의 M\*N 개의 밭을 선택하는 알고리즘을 생성하라.

**2. 문제 해결**

*Dynamic Programming*

- Dynamic programming이란, 전체 문제를 여러 단계로 세분화하고, 각 단계에서의 가장 최적의 해답을 찾아내고, 이를 통해 다음 단계에서의 최적의 해답을 찾는 것이다. 밭 한 칸부터 시작하여, 이익이 될 수 있는 이웃한 밭들을 선택함으로써 점진적으로 밭의 크기를 키우는 방식을 택하였다.

- 아이디어

각 밭을 샀을 때 얻는 이익에서 밭의 임대료를 빼서, 다시 저장한다. 이 값을 “밭의 값”이라 정의하자.

시작 점은 밭의 값이 가장 큰 밭부터 정의한다. 시작 점의 이웃한 상, 하, 좌, 우의 밭들 중에 더하였을 때, 이익이 최대가 되는 밭을 포함시킨다. 단, 손해가 나타나면 안된다. 이와 같은 방법을 반복하는데, 증가하는 밭의 꼴은 항상 직사각형 꼴이여야 한다. 즉, M\*N의 밭에서 이웃한 왼쪽에 위치한 밭들을 포함시키려면, M개의 모든 밭들의 밭의 값을 더하여 이익이 되는 경우를 의미하고, 이를 만족한다면 M개의 밭들 모두를 포함시켜야 한다.

만일 이웃한 두 방향의 밭들을 포함할 때 이익이 똑 같은 경우, 경우를 나누어 두 가지의 방법을 모두 시행한다. 즉, 한 방향의 밭들을 포함하여 단계를 계속하여 진행하고, 나머지 방향의 밭들을 포함하여 단계를 계속 진행했을 때의 이익을 비교하여, 큰 쪽을 저장한다.

만일 직사각형에서 1칸 이웃한 밭들이 모두 이익이 될 수 없는 경우, 2칸만큼 이웃한 경우까지 생각한다. 예를 들어 M\*N 직사각형에서 상, 하, 좌, 우의 모든 밭들이 포함될 때 이익이 될 수 없는 경우, 왼쪽과 오른쪽의 M\*2, 위와 아래의 2\*N 직사각형 내의 모든 밭들의 밭의 값을 더하여 이익이 되는가를 판단한다. 이와 같이 1칸, 2칸, 3칸, … 이웃한 밭들의 밭의 값을 계산하여 포함할 것인가를 판단한다. 더 이상의 이익이 되는, 연속되고 이웃한 밭들이 없는 경우 단계를 끝낸다.

가장 높은 밭의 값을 갖는 밭을 기준점으로 시작하여 모든 단계를 끝낸 경우 생성된 직사각형의 총 이익을 계산하여 저장한다. 이후 다음으로 높은 밭의 값을 갖는, 단 기존의 직사각형에 포함되지 않는 밭을 새로운 기준점으로 잡아 위와 같은 단계를 반복한다. 이와 같이 생성된 직사각형의 총 이익을 계산하여 저장한다. 이와 같이 밭의 값이 양수이고, 이미 직사각형에 포함되어 있지 않은 모든 밭들을 기준점으로 하여 직사각형을 만들고 이익을 저장한다.

생성된 각 직사각형의 이익들 중에서 가장 높은 이익을 갖는 직사각형을 선택하여 결과로 취한다.

- 이점

이익이 최대가 되려면 밭의 값이 최대 혹은 매우 큰 밭을 거의 항상 포함하고 있어야 될 것이다. 이를 이용하여 기준점을 잡았고, 기준점으로부터 뻗어나가는 알고리즘은 항상 최대의 이익을 취하고 있기 때문에, 정확한 결과를 도출할 수 있다.

- 한계

가장 큰 이익을 산출하는 직사각형의 밭이 항상 가장 큰 밭의 값을 갖는 밭 한 칸을 포함하지는 않을 것이다. 기준점을 잡는 기준을 밭의 값의 크기로 했지만, 이와 같은 단점에 의해 정확한 결과를 도출할 수 없을 경우가 생긴다. 이러한 경우를 보완하여, 모든 양수의 밭의 값을 갖는 밭들을 기준점으로 하여 여러 번을 반복한다.

**3. 확인 및 분석**

- 예시 밭들을 통해 위와 같은 아이디어가 정확한 결과를 도출하는지를 알아본다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 120 | 140 | 60 | 200 | 260 | 240 | 110 | 260 | 150 | 200 |
| 90 | 20 | 90 | 110 | 70 | 130 | 20 | 110 | 100 | 110 |
| 30 | 260 | 170 | 230 | 20 | 230 | 110 | 130 | 90 | 20 |
| 240 | 130 | 40 | 80 | 150 | 90 | 230 | 230 | 130 | 260 |
| 70 | 110 | 80 | 100 | 20 | 290 | 40 | 30 | 110 | 40 |
| 150 | 260 | 150 | 190 | 170 | 170 | 260 | 140 | 260 | 110 |
| 50 | 210 | 160 | 140 | 150 | 90 | 130 | 150 | 130 | 170 |
| 100 | 140 | 190 | 260 | 110 | 170 | 110 | 170 | 140 | 20 |
| 140 | 60 | 120 | 230 | 170 | 130 | 260 | 230 | 150 | 170 |
| 190 | 50 | 40 | 100 | 270 | 90 | 20 | 290 | 240 | 100 |

위와 같이 10\*10 밭들이 있고, 각 밭을 대여 혹은 사는 값을 X = 150이라 하자. 첫 번째로 각 밭의 이익인 숫자에서 밭을 사는 값 X를 뺀다. 즉, 각 칸은 밭의 값을 나타낸다. 아래는 보기에 편하도록 밭의 값이 양수인 경우, 그 칸을 회색으로 표시하였다. 또한 기준점을 시작으로 포함되는 직사각형의 빨간색 테두리로 표시하였고, 이웃한 밭들, 즉 합쳐질 수 있는 후보가 되는 밭들을 검은색 테두리로 표시하였다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -30 | -10 | -90 | 50 | 110 | 90 | -40 | 110 | 0 | 50 |
| -60 | -130 | -60 | -40 | -80 | -20 | -130 | -40 | -50 | -40 |
| -120 | 110 | 20 | 80 | -130 | 80 | -40 | -20 | -60 | -130 |
| 90 | -20 | -110 | -70 | 0 | -60 | 80 | 80 | -20 | 110 |
| -80 | -40 | -70 | -50 | -130 | 140 | -110 | -120 | -40 | -110 |
| 0 | 110 | 0 | 40 | 20 | 20 | 110 | -10 | 110 | -40 |
| -100 | 60 | 10 | -10 | 0 | -60 | -20 | 0 | -20 | 20 |
| -50 | -10 | 40 | 110 | -40 | 20 | -40 | 20 | -10 | -130 |
| -10 | -90 | -30 | 80 | 20 | -20 | 110 | 80 | 0 | 20 |
| 40 | -100 | -110 | -50 | 120 | -60 | -130 | 140 | 90 | -50 |

가장 높은 밭의 값을 갖는 밭을 살펴본다. 140이라는 값을 갖는 두 밭이 가장 큰 밭의 값을 갖기 때문에 두 밭 중 하나를 기준점으로 잡는다. 오른쪽 아래의 140을 먼저 기준점으로 잡아보자.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -30 | -10 | -90 | 50 | 110 | 90 | -40 | 110 | 0 | 50 |
| -60 | -130 | -60 | -40 | -80 | -20 | -130 | -40 | -50 | -40 |
| -120 | 110 | 20 | 80 | -130 | 80 | -40 | -20 | -60 | -130 |
| 90 | -20 | -110 | -70 | 0 | -60 | 80 | 80 | -20 | 110 |
| -80 | -40 | -70 | -50 | -130 | 140 | -110 | -120 | -40 | -110 |
| 0 | 110 | 0 | 40 | 20 | 20 | 110 | -10 | 110 | -40 |
| -100 | 60 | 10 | -10 | 0 | -60 | -20 | 0 | -20 | 20 |
| -50 | -10 | 40 | 110 | -40 | 20 | -40 | 20 | -10 | -130 |
| -10 | -90 | -30 | 80 | 20 | -20 | 110 | 80 | 0 | 20 |
| 40 | -100 | -110 | -50 | 120 | -60 | -130 | 140 | 90 | -50 |

140 칸의 밭의 위, 왼쪽, 오른쪽에 각각의 이웃한 밭의 값을 비교한다. 가장 큰 이익이 되는 90을 택하여 합친다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -30 | -10 | -90 | 50 | 110 | 90 | -40 | 110 | 0 | 50 |
| -60 | -130 | -60 | -40 | -80 | -20 | -130 | -40 | -50 | -40 |
| -120 | 110 | 20 | 80 | -130 | 80 | -40 | -20 | -60 | -130 |
| 90 | -20 | -110 | -70 | 0 | -60 | 80 | 80 | -20 | 110 |
| -80 | -40 | -70 | -50 | -130 | 140 | -110 | -120 | -40 | -110 |
| 0 | 110 | 0 | 40 | 20 | 20 | 110 | -10 | 110 | -40 |
| -100 | 60 | 10 | -10 | 0 | -60 | -20 | 0 | -20 | 20 |
| -50 | -10 | 40 | 110 | -40 | 20 | -40 | 20 | -10 | -130 |
| -10 | -90 | -30 | 80 | 20 | -20 | 110 | 80 | 0 | 20 |
| 40 | -100 | -110 | -50 | 120 | -60 | -130 | 140 | 90 | -50 |

140과 90이 합쳐진 1\*2 직사각형의 이웃한 밭들의 밭의 값의 합을 알아본다. 왼쪽은 -130, 위는 80, 오른쪽은 -50이므로 양수이면서 가장 최대의 이익의 되는 위의 두 칸을 합친다. 합친 2\*2 직사각형에서도 이웃한 밭들의 밭의 값의 합을 알아본다. 왼쪽은 110 + (-130) = -20, 위는 20 + (-10) = 10, 오른쪽은 20 + (-50) = -30으로 양수이면서 가장 최대의 이익이 되는 위의 두 칸을 합친다. 이와 같은 결과는 아래와 같다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -30 | -10 | -90 | 50 | 110 | 90 | -40 | 110 | 0 | 50 |
| -60 | -130 | -60 | -40 | -80 | -20 | -130 | -40 | -50 | -40 |
| -120 | 110 | 20 | 80 | -130 | 80 | -40 | -20 | -60 | -130 |
| 90 | -20 | -110 | -70 | 0 | -60 | 80 | 80 | -20 | 110 |
| -80 | -40 | -70 | -50 | -130 | 140 | -110 | -120 | -40 | -110 |
| 0 | 110 | 0 | 40 | 20 | 20 | 110 | -10 | 110 | -40 |
| -100 | 60 | 10 | -10 | 0 | -60 | -20 | 0 | -20 | 20 |
| -50 | -10 | 40 | 110 | -40 | 20 | -40 | 20 | -10 | -130 |
| -10 | -90 | -30 | 80 | 20 | -20 | 110 | 80 | 0 | 20 |
| 40 | -100 | -110 | -50 | 120 | -60 | -130 | 140 | 90 | -50 |

이후 같은 방법으로 이웃한 왼쪽, 위쪽, 오른쪽의 밭들의 밭의 값의 합을 알아본다. 계산 결과 모든 방향에서 이웃한 밭들의 밭의 값의 합이 음수이다. 이러한 경우에는 두 칸의 이웃한 경우까지 생각해본다. 검은색 테두리의 밭들의 밭의 값의 합을 살펴보면, 왼쪽은 -140, 위쪽은 80, 오른쪽은 -160으로, 양수이면서 가장 최대의 이익이 되는 위의 네 칸을 합친다. 이와 같은 방법을 반복하면 결론적으로 아래와 같은 직사각형의 밭이 포함된다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -30 | -10 | -90 | 50 | 110 | 90 | -40 | 110 | 0 | 50 |
| -60 | -130 | -60 | -40 | -80 | -20 | -130 | -40 | -50 | -40 |
| -120 | 110 | 20 | 80 | -130 | 80 | -40 | -20 | -60 | -130 |
| 90 | -20 | -110 | -70 | 0 | -60 | 80 | 80 | -20 | 110 |
| -80 | -40 | -70 | -50 | -130 | 140 | -110 | -120 | -40 | -110 |
| 0 | 110 | 0 | 40 | 20 | 20 | 110 | -10 | 110 | -40 |
| -100 | 60 | 10 | -10 | 0 | -60 | -20 | 0 | -20 | 20 |
| -50 | -10 | 40 | 110 | -40 | 20 | -40 | 20 | -10 | -130 |
| -10 | -90 | -30 | 80 | 20 | -20 | 110 | 80 | 0 | 20 |
| 40 | -100 | -110 | -50 | 120 | -60 | -130 | 140 | 90 | -50 |

이와 같이 첫 번째 기준점을 통해 얻은 직사각형의 밭의 값의 합을 계산하여 저장한다. 계산한 결과 빨간색 테두리 내의 모든 밭의 이익의 합은 620이다. 이후 이 직사각형의 형태를 그대로 유지하고, 다른 기준점에서 같은 방법을 반복한다. 다음 기준점은 가운데에 위치하는 140인 밭이다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -30 | -10 | -90 | 50 | 110 | 90 | -40 | 110 | 0 | 50 |
| -60 | -130 | -60 | -40 | -80 | -20 | -130 | -40 | -50 | -40 |
| -120 | 110 | 20 | 80 | -130 | 80 | -40 | -20 | -60 | -130 |
| 90 | -20 | -110 | -70 | 0 | -60 | 80 | 80 | -20 | 110 |
| -80 | -40 | -70 | -50 | -130 | 140 | -110 | -120 | -40 | -110 |
| 0 | 110 | 0 | 40 | 20 | 20 | 110 | -10 | 110 | -40 |
| -100 | 60 | 10 | -10 | 0 | -60 | -20 | 0 | -20 | 20 |
| -50 | -10 | 40 | 110 | -40 | 20 | -40 | 20 | -10 | -130 |
| -10 | -90 | -30 | 80 | 20 | -20 | 110 | 80 | 0 | 20 |
| 40 | -100 | -110 | -50 | 120 | -60 | -130 | 140 | 90 | -50 |

위와 같은 140 밭을 기준으로 위와 같은 단계를 진행한 결과 아래와 같이 나타난다. 아래의 빨간색 테두리 내의 모든 밭의 값의 합은 220이다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -30 | -10 | -90 | 50 | 110 | 90 | -40 | 110 | 0 | 50 |
| -60 | -130 | -60 | -40 | -80 | -20 | -130 | -40 | -50 | -40 |
| -120 | 110 | 20 | 80 | -130 | 80 | -40 | -20 | -60 | -130 |
| 90 | -20 | -110 | -70 | 0 | -60 | 80 | 80 | -20 | 110 |
| -80 | -40 | -70 | -50 | -130 | 140 | -110 | -120 | -40 | -110 |
| 0 | 110 | 0 | 40 | 20 | 20 | 110 | -10 | 110 | -40 |
| -100 | 60 | 10 | -10 | 0 | -60 | -20 | 0 | -20 | 20 |
| -50 | -10 | 40 | 110 | -40 | 20 | -40 | 20 | -10 | -130 |
| -10 | -90 | -30 | 80 | 20 | -20 | 110 | 80 | 0 | 20 |
| 40 | -100 | -110 | -50 | 120 | -60 | -130 | 140 | 90 | -50 |

이와 같이 모든 테두리 밖의, 밭의 값이 양수인 밭들을 기준점으로 잡고 같은 단계를 반복한다. 이와 같이 모든 단계를 끝내면 아래와 같은 결과가 나타난다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -30 | -10 | -90 | 50 | 110 | 90 | -40 | 110 | 0 | 50 |
| -60 | -130 | -60 | -40 | -80 | -20 | -130 | -40 | -50 | -40 |
| -120 | 110 | 20 | 80 | -130 | 80 | -40 | -20 | -60 | -130 |
| 90 | -20 | -110 | -70 | 0 | -60 | 80 | 80 | -20 | 110 |
| -80 | -40 | -70 | -50 | -130 | 140 | -110 | -120 | -40 | -110 |
| 0 | 110 | 0 | 40 | 20 | 20 | 110 | -10 | 110 | -40 |
| -100 | 60 | 10 | -10 | 0 | -60 | -20 | 0 | -20 | 20 |
| -50 | -10 | 40 | 110 | -40 | 20 | -40 | 20 | -10 | -130 |
| -10 | -90 | -30 | 80 | 20 | -20 | 110 | 80 | 0 | 20 |
| 40 | -100 | -110 | -50 | 120 | -60 | -130 | 140 | 90 | -50 |

네모 칸이 쳐져 있는 직사각형들의 모든 밭의 값의 합은 각각 370, 210, 90, 220, 620, 110, 20, 350, 320, 600, 40이다. 이 중 가장 높은 이익을 취할 수 있는 값은 620이고, 이는 위의 검은색 테두리로 되어 있는 직사각형이다.

**4. 고찰**

본 문제는 각 밭의 이익이 적혀 있고, 밭 하나 당 대여 혹은 사는 비용이 정해져 있는 밭들 중에 최대의 이익을 낼 수 있는 직사각형 모양의 밭을 택하는 알고리즘을 만드는 것이다. 고안한 알고리즘은 dynamic programming을 기반으로 하고 있다. 작은 단계부터 시작하여 직사각형 모양을 유지하고, 이익을 최대화하도록 밭의 크기를 늘려가는 것이다. Dynamic programming 기법에서 단계를 나누고, 다음 단계의 해답이 이전 단계까지의 해답과 관련이 있는 점에서 착안하였다. 본 알고리즘의 가장 큰 단점은 정확한 해답을 구하기 어렵다는 것이었는데, 이는 기준점을 모든 양수의 밭의 값을 갖는 밭들을 함으로써, 모든 경우를 고려한다는 것으로 보완하였다.

**5. 참고문헌 및 사용**

- 이진규 교수님, [문제해결기법] CSE2011\_2016spring\_Lecture\_Note08, 2016